

# Minimization

---

วัตถุประสงค์ของบทเรียน

- สามารถหารูป Boolean expression ที่สั้นที่สุดโดยใช้วิธีการลดรูป (minimization) ต่อไปนี้
  - Boolean algebra
  - Karnaugh map
  - Quine-McCluskey

# การลดรูปวงจร

---

การลดรูปวงจรเป็นการลดความซับซ้อนของวงจร โดยทำให้จำนวนของ  
สัญญาณเข้า และ จำนวนเกต ของวงจรมีน้อยลง โดยใช้วิธีต่างๆ ได้แก่

1. การใช้กฎต่างๆของบูลีน
2. การใช้ Karnaugh map
3. การใช้วิธี Quine-McCluskey

# การใช้ Boolean algebra

---

- เป็นการลดรูปวงจรโดยใช้กฎต่างๆ ของ Boolean เพื่อให้เหลือจำนวนตัวแปร และจำนวนของ operation (เกต) น้อยที่สุด
- นิยมใช้กับกรณีที่มีสมการ Boolean ในรูป normal form หรือ canonical form ที่ไม่ซับซ้อน
- ข้อเสียคือ ถ้าไม่ชำนาญในการใช้กฎต่างๆ ของบูล อาจจะทำได้คำตอบที่ดีที่สุด

(ดูตัวอย่างในห้องเรียน)

# การใช้ Karnaugh Map

---

Karnaugh map เป็นวิธีการในการช่วยลดรูปของวงจรถติคติโดย

1. เขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง input และ output

จำนวนช่องของ Karnaugh map =  $2^n$ ;  $n$  = จำนวนตัวแปร

2. เติมผลของฟังก์ชัน (0 หรือ 1) ลงในตาราง Karnaugh map

2.1 จากตารางค่าความจริง

2.2 จากฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ minterm หรือ maxterm

3. ลดรูปของฟังก์ชัน โดยการจับกลุ่ม output ที่เหมือนกันในแนวตั้ง หรือแนวนอน โดยที่จำนวนของสมาชิกต้องเป็น  $2^i$ ;  $1 \leq i \leq n$

จำนวนตัวแปรที่เหลือจากการลดรูปจะเท่ากับ  $n-i$

# Karnaugh Map

---

หนึ่งตัวแปร

| $x$ | $f(x)$ |
|-----|--------|
| $0$ | $f(0)$ |
| $1$ | $f(1)$ |

(a)

| $x$    |        |
|--------|--------|
| $0$    | $1$    |
| $f(0)$ | $f(1)$ |

(b)

สองตัวแปร

| $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|-----|-----|----------|
| $0$ | $0$ | $f(0,0)$ |
| $0$ | $1$ | $f(0,1)$ |
| $1$ | $0$ | $f(1,0)$ |
| $1$ | $1$ | $f(1,1)$ |

(a)

|     |          | $y$      |          |
|-----|----------|----------|----------|
|     |          | $0$      | $1$      |
| $0$ | $f(0,0)$ | $f(0,0)$ | $f(0,1)$ |
| $1$ | $f(1,0)$ | $f(1,0)$ | $f(1,1)$ |

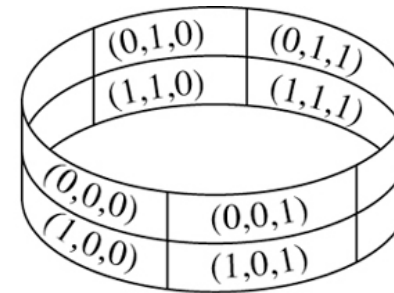
(b)

# Karnaugh Map

สามตัวแปร

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|-----|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0   | $f(0,0,0)$ |
| 0   | 0   | 1   | $f(0,0,1)$ |
| 0   | 1   | 0   | $f(0,1,0)$ |
| 0   | 1   | 1   | $f(0,1,1)$ |
| 1   | 0   | 0   | $f(1,0,0)$ |
| 1   | 0   | 1   | $f(1,0,1)$ |
| 1   | 1   | 0   | $f(1,1,0)$ |
| 1   | 1   | 1   | $f(1,1,1)$ |

(a)



(b)

|     |   | $yz$       |            |            |            |
|-----|---|------------|------------|------------|------------|
|     |   | 00         | 01         | 11         | 10         |
| $x$ | 0 | $f(0,0,0)$ | $f(0,0,1)$ | $f(0,1,1)$ | $f(0,1,0)$ |
|     | 1 | $f(1,0,0)$ | $f(1,0,1)$ | $f(1,1,1)$ | $f(1,1,0)$ |

(c)

# Karnaugh Map

สี่ตัวแปร

| w | x | y | z | $f(w,x,y,z)$ |
|---|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $f(0,0,0,0)$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | $f(0,0,0,1)$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $f(0,0,1,0)$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $f(0,0,1,1)$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $f(0,1,0,0)$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $f(0,1,0,1)$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $f(0,1,1,0)$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $f(0,1,1,1)$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $f(1,0,0,0)$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $f(1,0,0,1)$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $f(1,0,1,0)$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $f(1,0,1,1)$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $f(1,1,0,0)$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $f(1,1,0,1)$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $f(1,1,1,0)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $f(1,1,1,1)$ |

(a)

|    |    | yz           |              |              |              |
|----|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
|    |    | 00           | 01           | 11           | 10           |
| wx | 00 | $f(0,0,0,0)$ | $f(0,0,0,1)$ | $f(0,0,1,1)$ | $f(0,0,1,0)$ |
|    | 01 | $f(0,1,0,0)$ | $f(0,1,0,1)$ | $f(0,1,1,1)$ | $f(0,1,1,0)$ |
|    | 11 | $f(1,1,0,0)$ | $f(1,1,0,1)$ | $f(1,1,1,1)$ | $f(1,1,1,0)$ |
|    | 10 | $f(1,0,0,0)$ | $f(1,0,0,1)$ | $f(1,0,1,1)$ | $f(1,0,1,0)$ |

(b)

# Karnaugh Map

หาตัวแปร

|    |    | xyz |     |     |     |     |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|    |    | 000 | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
| vw | 00 | 0   | 1   | 3   | 2   | 6   | 7   | 5   | 4   |
|    | 01 | 8   | 9   | 11  | 10  | 14  | 15  | 13  | 12  |
|    | 11 | 24  | 25  | 27  | 26  | 30  | 31  | 29  | 28  |
|    | 10 | 16  | 17  | 19  | 18  | 22  | 23  | 21  | 20  |



# Karnaugh Map

---

หลักการลดรูปโดยใช้ Karnaugh Map

1. วาดตาราง Karnaugh map ให้มีขนาดตามจำนวนตัวแปรที่มี

2. เติมค่าของสัญญาณขาออกที่เป็น 1 หรือ don't care

จากตารางค่าความจริง หรือ สมการบูลีน ลงใน Karnaugh map ให้ครบ

3. จับกลุ่มของช่องที่มีค่า 1 หรือ don't care

ที่ติดกันในแนวตั้งหรือแนวนอน โดยให้จำนวนช่องที่จับกลุ่มมีค่าเป็น  $2^n$  (n จะมีความเท่ากับจำนวนตัวแปรที่จะสามารถลดลงไปได้)

4. กำจัดตัวแปรของสัญญาณเข้าในแต่ละกลุ่ม โดยดูจากสัญญาณเข้าที่มีการเปลี่ยนแปลงจะถูกตัดออกไปแล้วนำผลที่ได้จากทุกกลุ่มมาทำการ OR กัน

## Quine-McClusky Method

---

ใช้ในการลดรูปสมการ โดยมีหลักการดังต่อไปนี้

1. เขียน minterm ให้อยู่ในรูปของเลขฐานสอง
2. เรียงลำดับ minterm ที่อยู่ในรูปของเลขฐานสองจากน้อยไปมาก โดยให้เทอมที่มีจำนวนบิตของ 1 เท่ากันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน
3. จับคู่ minterm ที่มีจำนวนบิตต่างกันเพียง 1 บิต ซึ่งจะสามารถลดตัวแปรลงไปได้หนึ่งตัว (แทนตัวแปรที่ลดไปด้วย -)
4. ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนไม่สามารถจับคู่ต่อไปได้
5. นำผลที่ได้จากการลดตัวแปร ในขั้นตอนที่ผ่านมาแล้ว มาทำการจับคู่ไปเรื่อยๆ จนไม่สามารถจับคู่ได้อีก

## Quine McClusky Method

---

6. นำเทอมที่ไม่สามารถจับคู่ได้ไปเติมลงในตารางเพื่อหา Essential Prime Implicant (EPI) และ Prime Implicant (PI) เพื่อหาคำตอบ

Prime Implicant คือกลุ่มของ minterm ที่ไม่ได้เป็น subset ของ PI กลุ่มอื่น  
Essential Prime Implicant คือ PI ที่มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่ได้อยู่ใน PI อื่นๆ